

Université d'Oran 1, A. BENBELLA
Faculté des Sciences Exactes et Appliquées
Département de Mathématiques

Concours d'Accès au Doctorat LMD "Analyse, EDP et Applications"
Année Universitaire 2015-2016
Sujet n°3 de l'Épreuve de Spécialité (durée: 01h30mn)

Exercice I : (06 points)

1) Rappeler l'énoncé du lemme de partition de l'unité dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n .

2) Soient K_1 et K_2 deux compacts disjoints de Ω . Montrer qu'il existe $\varphi \in D(\Omega)$ telle que :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_1 \\ -1 & \text{si } x \in K_2 \end{cases}$$

et $|\varphi(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Exercice II : (14 points)

1) Rappeler la définition d'un opérateur fermé sur un espace de Hilbert H .

2) Montrer que l'adjoint d'un opérateur non borné sur H à domaine dense est un opérateur fermé.

Soit $(A, D(A))$ un opérateur symétrique de domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert H , qui vérifie :

$$\langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in D(A)$$

3) Montrer que $\|(A + I)x\|^2 \geq \|x\|^2 + \|Ax\|^2$, pour tout $x \in D(A)$. I désigne l'opérateur identité sur H .

4) Si A est fermé, montrer que $\text{Im}(A + I)$ est fermé dans H .

5) Montrer que A est auto-adjoint si et seulement si A est fermé et l'équation $A^*x = -x$ n'a pas de solution non triviale.

6) Application : on considère l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ de domaine $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Quel est son adjoint A^* ? .